$q = 10^m - 1$ $\qquad$ q è divisibile per 9

$m = 1$ $\qquad$ $10 - 1 = 9$ ✓

$m = k$ $\qquad$ $10^k - 1$

$m = k+1$ $\qquad$ $10^{k+1} - 1 \to 10^k \cdot 10$

---

$$\sum_{k=0}^{m} q^k = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \; q \neq 1$$

$m = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} q^0 = \frac{1-q}{1-q} = 1 \to 1 = 1 \; ✓$$

$m = m+1$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m+1} q^k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} q^k} + q^{m+1}$$

$$\frac{1-q^{m+1}}{1-q} + q^{m+1} \to \frac{1-q^{m+1}+q^{m+1}(1-q)}{1-q}$$

$$\frac{1-\cancel{Q^{m+1}}+\cancel{Q^{m+1}} - Q^{m+2}}{1-Q} = \underbrace{\frac{1-Q^{m+2}}{1-Q}}$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} q^k = \frac{1-Q^{m+2}}{1-Q}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in N, x \in R, x \geq -1$$

$n = 0$

$$(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x \rightarrow 1 \geq 1 \quad ✓$$

$n = n+1$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$$(1+x)(1+x)^n \geq 1+nx(1+x)$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+\cancel{nx^2}$$

lo cancelliamo perchè essendo una quantità positiva non influenza la positività della restante disuguaglianza

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+x(1+n) \quad ✓$$

---

La somma dei primi n numeri dispari è $n^2$

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = n^2$$

$n = 0$

$$\sum_{1}^{1} 2-1 = 1^2 \rightarrow 1 = 1$$

$n = n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1 = (n+1)^2$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2k-1}_{n^2} + 2(n+1)-1 = (n+1)^2$$

$$n^2 + 2n + 2 - 1 = (n+1)^2$$

$$(n+1)^2 = (n+1)^2$$

Supponendo sia vero per n abbiamo dimostrato che è vera per n+1

$$\sum_{m=0}^{m} 2m+1 = m^2$$

$m = 0$

$$\sum_{1}^{0} 2m+1 = 1 \rightarrow 1 = 1 \checkmark$$

Supponendo sia vero per $m-1$ lo dimostriamo per $m$

$m = m-1$

$$\sum_{m=0}^{m-1} 2(m-1)+1 = (m-1)^2$$

$m = m$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{m-1} 2(m-1)+1}_{(m-1)^2} + \underbrace{2(m-1)+1}_{2m-1}$$

$$m^2 \cancel{-2m+1} \cancel{+2m-1} \rightarrow m^2$$

$n^3+5n=6m \qquad n\geq 1$

$n=1$

$1+5=6$

Supponendo sia vero per $n$ lo dimostriamo per $n+1$

$n=n+1$

$(n+1)^3+5(n+1)=6m$

$(n+1)(n^2+1+2n)+5n+5=6m$

$n^3+n+2n^2+n^2+1+2n+5n+5=6m$

$n^3+3n^2+8n+6=6m$

$n^3+5n+3n^2+3n+6$

$6m+\underbrace{3n(n+1)}+6=6m$

dato che $n$ o $n+1$ è un numero pari uno di questi avrà come fattore primo 2 moltiplicandolo per 3 avremo un numero sicuramente divisibile per 6

$$\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot i = n(n+1) \qquad n \geq 1$$

$n = 1$

$2 = 1(1+1) \rightarrow 2 = 2$ ✓

Supponendo sia vero per $n$ dimostriamolo per $n+1$

$n = n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2 \cdot i = (n+1)(n+2)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot i}_{\downarrow} + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

$$n(n+1) + 2n + 2 = (n+1)(n+2)$$

$$n^2 + n + 2n + 2 = n^2 + 2n + n + 2$$

$$0 = 0$$

Dimostrazione per induzione su $n$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$n = 1$

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Supponendo sia vera per $n$ la dimostriamo per $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}}_{\downarrow} + \frac{1}{n+1(n+1+1)}$$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

Ottenuto lo stesso risultato della formula sostituendo $n+1$ possiamo affermare che la dimostrazione è fatta

La somma dei primi n numeri dispari è $n^2$

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = n^2$$

$n=1$

$2-1 = 1^2 \rightarrow 1=1$

Supponendo sia vero per n lo dimostriamo per n+1

$n = n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1 = (n+1)^2$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2k-1}_{n^2} + 2(n+1)-1$$

$n^2 + 2n + 2 - 1 \rightarrow n^2 + 2n + 1 \rightarrow (n+1)^2$